МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания к выполнению РГР по теме:

""Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных"

по дисциплине **"Математика "** для специальности **21.03.01 Нефтегазовое дело**
для студентов очной формы обучения

Мурманск
2019 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению РГР содержат задания на выполнение РГР№3 **"Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких опеременных"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта РГР.

Расчетно-графическая работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности.

Целью РГР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы студент мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

РГР должна быть выполнено и представлено в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания студенту необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие. Отделите решение задачи от ее условия некоторым интервалом.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения

РГР №3 "Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных"

Задача 1. Дана функция $z = f(x, y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

2) найти полный дифференциал dz;

3) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция
1	$z = \ln(\sqrt{x} + 2y^3)$	2	$z = (y^2 - x)\arcsin(2x)$
3	$z = \mathrm{tg}(x - 5y^2)$	4	$z = e^{-x^2}(y + 4x)^2$
5	$z = e^{x+3y} + \cos(xy)$	6	$z = \ln^3(2y - x)$
7	$z = x\cos(3x + 2y)$	8	$z = \sqrt{3y - \sin x}$
9	$z = x^y + \sin(x - y)$	10	$z = 4xy^5 - e^{x^2 - 3y}$

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$, если переменные x, y и z связаны равенством вида $F(x, y, z) = 0$.

Номер варианта	Равенство $F(x, y, z) = 0$	Номер варианта	Равенство $F(x, y, z) = 0$
1	$e^{xy-z} + 3x^2\sin y - 2xz^3 = 0$	2	$\sin(xy^2) + z^3xy^2 + z^4 - x = 0$
3	$xe^{z-y} + zy + y^2\ln x - 2z = 0$	4	$(x - 2y)^4 - 5\frac{y^2}{z} + 3\cos x - z^5 = 0$
5	$\ln(xz^3) + y^3 - 5x^2yz^4 + 5x = 0$	6	$\cos(y + e^z) + xz^5y + 3x^3 + 4 = 0$
7	$e^{y^2-z^2} + y\mathrm{tg}x - zx^5 + 3y = 0$	8	$(z - 2x)^3 + 3y^4x - y^2e^{2z} - 2x = 0$
9	$ze^{-y} + \sqrt{x - z^3} + y^2zx - y^5 = 0$	10	$\sin^2 z + \ln(x - y) + 2x^4 - 3yz^2 = 0$

Задача 3. Дана сложная функция $z = f(x, y, t)$, где $x = x(t),\ y = y(t)$. Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$.

Номер	Функция $z = f(x, y, t)$	Функции $x = x(t),\ y = y(t)$

варианта		
1	$u = (3t + 2x^2 - y)^3$	$x = \mathrm{tg}t,\ y = \dfrac{1}{\cos t}$
2	$u = (4t - x)\ e^{x-2y}$	$x = \dfrac{1}{t^2},\ y = \sqrt{2t+1}$
3	$u = t\sin(x^3 + y)$	$x = \sqrt{t} + 1,\ y = t^4$
4	$u = \mathrm{tg}(x + t)\, e^y$	$x = \ln(t^3 + 1),\ y = t^2$
5	$u = \sqrt{t - 2xy}$	$x = \sin 3t,\ y = 1 - 5t$
6	$u = \sin(x^2 + y) - y\sqrt{t}$	$x = e^{-t},\ y = \dfrac{t}{2} - 2t^2$
7	$u = \dfrac{\ln(2x - t)}{y}$	$x = \cos 4t,\ y = \sin 2t$
8	$u = x\mathrm{ctg}(t - 3y)$	$x = 2 - 3t^2,\ y = \dfrac{1}{t+1}$
9	$u = \ln(2t + x - y^2)$	$x = \sin^2 t,\ y = 3t - t^{-3}$
10	$u = xy^2 + \cos(y + 2t)$	$x = \sqrt{t} - t,\ y = 2t - 4$

Задача 4. Дана функция двух переменных: $z = f(x, y)$ и уравнения границ замкнутой области D на плоскости xOy. Требуется:

1) найти наибольшее и наименьшее значения функции z в области D;

2) сделать чертеж области D в системе координат, указав на нем точки, в которых функция имеет наибольшее и наименьшее значения.

Номер варианта	Функция	Уравнения границ области D
1	$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$	$x = 0,\ y = 0,\ x + y = -5$
2	$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$	$x = 1,\ y = -3,\ x + y = 2$
3	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 5x + 4$	$x = -1,\ y = -2,\ x + y = 1$
4	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$	$x = -1,\ y = 0,\ x + y = 3$
5	$z = x^2 - 3xy + 4x + 8y$	$x = 0,\ y = 4,\ x + y = -2$
6	$z = x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y$	$x = -1,\ y = -1,\ y + x = 5$
7	$z = 10 - x - 2xy - x^2$	$x = -3,\ y = -1,\ x + y = 0$
8	$z = 2x^2 + y^2 - xy + x - y + 3$	$x = -1,\ y = 2,\ x - y = 0$
9	$z = x^2 - y^2 + xy - 3x + 1$	$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 4$

10	$z = x^2 + y^2 - xy + x - 4y$	$x = 1,\ y = 3,\ x + y = -3$

Задача 5. Поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности σ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если $x_0,\ y_0$ – заданные числа.

Номер варианта	Уравнение поверхности	Значения $x_0,\ y_0$
1	$z = 3y - x^2y + x$	$x_0 = 1,\ y_0 = 5$
2	$z = \dfrac{x^2}{y} + 3x - y^2$	$x_0 = 1,\ y_0 = -1$
3	$z = \sqrt{xy} + x^3 - 5$	$x_0 = 1,\ y_0 = 4$
4	$z = y^3x - y + x^2$	$x_0 = -1,\ y_0 = 2$
5	$z = \cos y + 2x^2 - xy$	$x_0 = 2,\ y_0 = 0$
6	$z = xy + y^3 + 2x$	$x_0 = 2,\ y_0 = 1$
7	$z = \ln(2x) - xy^3 + y$	$x_0 = \dfrac{1}{2},\ y_0 = 2$
8	$z = e^y + x^2y - x^4 + 1$	$x_0 = -1,\ y_0 = 0$
9	$z = y\sin x + 3y^2$	$x_0 = \dfrac{\pi}{2},\ y_0 = -1$
10	$z = 2y - \dfrac{y}{x^2} + x^5$	$x_0 = 1,\ y_0 = 3$

Задача 6. Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси Ox тонкой однородной пластинки, имеющей форму области D, ограниченной заданными линиями. Построить чертеж области интегрирования.

Номер варианта	Границы области D	Номер варианта	Границы области D
1	$x + y = 3,\ x = 2y^2,\ y = 0$	2	$x + y = 1,\ x^2 = y - 1,\ x = 1$
3	$y = x + 1,\ 1 - x = y^2,\ y = 0$	4	$y = x^2,\ 2y = x^2,\ x = 2$
5	$xy = 2,\ y = 2x,\ x = 2$	6	$x + y = 0,\ x^2 = y,\ y = 1$
7	$x + y = 2,\ y = x^3,\ x = 0$	8	$xy = 1,\ x = y,\ y = 2$
9	$y = x + 2,\ y = x^2$	10	$x = y,\ 2x + y^2 = 0,\ y = 2$

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x, y) \equiv 1$.

Задача 7. Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости xOy, а ось симметрии совпадает с осью Oz, если заданы радиус основания R, высота цилиндра H и функция плотности $\gamma = \gamma\,(\rho)$, где ρ – полярный радиус точки.

№ варианта	Размеры цилиндра, плотность вещества	№ варианта	Размеры цилиндра, плотность вещества
1	$R = 1,\ H = 0{,}5,\ \gamma = (2-\rho)^2$	2	$R = 2,\ H = 0{,}5,\ \gamma = 2+\rho^2+\rho^3$
3	$R = 1,\ H = 3,\ \gamma = 2\rho+\sqrt{\rho}+3$	4	$R = 2,\ H = 1,\ \gamma = \left(1+\dfrac{\rho}{2}\right)^2$
5	$R = 2,\ H = 0{,}5,\ \gamma = 6\rho-3\rho^2+2$	6	$R = 3,\ H = 1,\ \gamma = \dfrac{\rho}{3}+\dfrac{\rho^3}{9}+2$
7	$R = 1,\ H = 2,\ \gamma = 4\rho^2+\rho+5$	8	$R = 4,\ H = 0{,}25,\ \gamma = \rho^2+5\sqrt{\rho}+2$
9	$R = 1,\ H = 0{,}1,\ \gamma = (3+2\rho)^2$	10	$R = 1,\ H = 5,\ \gamma = 3\rho+5\rho^3+1$

Решение примерного варианта РГР №3

Задача 1. Дана функция $z = \cos^2(2x - y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

2) найти полный дифференциал dz;

3) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

<u>Решение.</u>

1) При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ считаем аргумент y постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos^2(2x - y))'_x = 2\cos(2x - y)(\cos(2x - y))'_x =$$

$$= 2\cos(2x - y)(-\sin(2x - y))(2x - y)'_x = -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)((2x)'_x - (y)'_x) =$$

$$= -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)(2 - 0) = -\sin(2(2x - y))2 = -2\sin(4x - 2y).$$

При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ считаем аргумент x постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\cos^2(2x - y))'_y = 2\cos(2x - y)(\cos(2x - y))'_y =$$

$$= 2\cos(2x - y)(-\sin(2x - y))(2x - y)'_y = -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)((2x)'_y - (y)'_y) =$$

$$= -\sin(2(2x - y))(0 - 1) = \sin(4x - 2y).$$

2) Находим полный дифференциал функции:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -2\sin(4x - 2y)\mathrm{d}x + \sin(4x - 2y)\mathrm{d}y.$$

3) Найдем смешанные частные производные второго порядка.

Для того, чтобы найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, дифференцируем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (-2\sin(4x - 2y))'_y = [\textit{считаем } x \textit{ постоянным}] =$$

$$= -2\cos(4x - 2y)(4x - 2y)'_y = -2\cos(4x - 2y)(0 - 2) = 4\cos(4x - 2y).$$

Для того, чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, дифференцируем $\frac{\partial z}{\partial y}$ по x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (\sin(4x - 2y))'_x = [\textit{считаем } y \textit{ постоянным}] =$$

$$= \cos(4x - 2y)(4x - 2y)'_x = \cos(4x - 2y)(4 - 0) = 4\cos(4x - 2y).$$

Получили: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4\cos(4x - 2y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4\cos(4x - 2y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -2\sin(4x - 2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(4x - 2y)$;

2) $dz = -2\sin(4x - 2y)dx + \sin(4x - 2y)dy$;

3) равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ выполнено.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$, если переменные x, y, и z связаны равенством $4x^2 y e^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x = 0$.

Решение.

Имеем равенство вида $F(x, y, z) = 0$, задающее неявно функцию 2-х переменных. Для $F(x, y, z) = 4x^2ye^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x$ получаем:

$$F'_x = (4x^2ye^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x)'_x = [\textit{считаем } y \textit{ и } z \textit{ постоянными}] =$$

$$= 8xye^z + \sin(x^3 - z)3x^2 + 3 = 8xye^z + 3x^2\sin(x^3 - z) + 3;$$

$$F'_y = (4x^2ye^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x)'_y = [\textit{считаем } x \textit{ и } z \textit{ постоянными}] =$$

$$= 4x^2e^z + 4y;$$

$$F'_z = (4x^2ye^z - \cos(x^3 - z) + 2y^2 + 3x)'_z = [\textit{считаем } x \textit{ и } y \textit{ постоянными}] =$$

$$= 4x^2ye^z - \sin(x^3 - z).$$

Находим частные производные функции $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{8xye^z + 3x^2\sin(x^3 - z) + 3}{4x^2ye^z - \sin(x^3 - z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4x^2e^z + 4y}{4x^2ye^z - \sin(x^3 - z)}$$

Получаем частную производную функции $y = y(x, z)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{8xye^z + 3x^2\sin(x^3 - z) + 3}{4x^2e^z + 4y}.$$

Ответы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{8xye^z+3x^2\sin(x^3-z)+3}{4x^2ye^z-\sin(x^3-z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4x^2e^z+4y}{4x^2ye^z-\sin(x^3-z)}$;

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{8xye^z+3x^2\sin(x^3-z)+3}{4x^2e^z+4y}.$$

Задача 3. Дана сложная функция $z = \ln(2t - x^2y)$, где $x = \cos 3t$, $y=\sqrt{t^2+1}$. Найти полную производную $\dfrac{dz}{dt}$.

Решение.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{2t-x^2y}(-2xy)\left(\cos 3t\right)'+\frac{1}{2t-x^2y}(-x^2)\left(\sqrt{t^2+1}\right)'+$$

$$+\frac{1}{2t-x^2y}\cdot 2=\frac{1}{2t-x^2y}\left(-2xy\left(-3\sin 3t\right)-x^2\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}2t+2\right)=$$

$$=\frac{1}{2t-x^2y}\left(6xy\sin 3t-\frac{x^2t}{\sqrt{t^2+1}}+2\right).$$

Подставив в полученный результат $x = \cos 3t$, $y=\sqrt{t^2+1}$, получим выражение полной производной $\dfrac{dz}{dt}$ через независимую переменную t:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2t-\left(\cos 3t\right)^2\sqrt{t^2+1}}\left(6\cos 3t\sqrt{t^2+1}\sin 3t-\frac{\left(\cos 3t\right)^2t}{\sqrt{t^2+1}}+2\right)=$$

$$=\frac{3\sin 6t\,(t^2+1)-t\cos^2 3t+2\sqrt{t^2+1}}{2t\sqrt{t^2+1}-\cos^2 3t(t^2+1)}.$$

Ответ: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{3\sin 6t\,(t^2+1)-t\cos^2 3t+2\sqrt{t^2+1}}{2t\sqrt{t^2+1}-\cos^2 3t(t^2+1)}$.

Задача 4. Дана функция двух переменных: $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5$ и уравнения границ замкнутой области D на плоскости xOy: $x = 0$, $y = -1$,
$x + y = 3$. Требуется:

1) найти наибольшее и наименьшее значения функции z в области D;

2) сделать чертеж области D в системе координат, указав на нем точки, в которых функция имеет наибольшее и наименьшее значения.

Решение.

1) Для наглядности процесса решения построим область D в системе координат. Область D представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = -1$ и $x + y = 3$. Обозначим вершины треугольника: A, B, C.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции z, сначала найдем все стационарные точки функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5$, лежащие внутри области D (если они есть), и вычислим в них значения функции.

Стационарные точки – это точки, в которых все частные производные
1-го порядка равны нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5)'_x = 0, \\ (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5)'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ -x + 2(2x - 4) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4, \\ -x + 4x - 8 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6, \\ y = 2x - 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

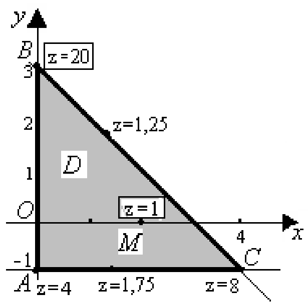
Стационарная точка $M(2,\ 0) \in D$ (рис. 9) и является внутренней точкой области. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(M) = \left(x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5\right)\Big|_{\substack{x=2;\\ y=0}} = 2^2 + 0 + 0 - 8 + 0 + 5 = 1.$$

Теперь найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D. Граница является кусочно-заданной, поэтому будем проводить исследование функции $z\,(x,\,y)$ отдельно на каждом участке границы.

а) Уравнение участка AB имеет вид: $\begin{cases} x = 0, \\ y \in [-1; 3], \end{cases}$ и функция z является функцией одной переменной y:

$$z\big|_{AB} = \left(x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5\right)\Big|_{x=0} = y^2 + 2y + 5 \overset{\text{обозначим}}{=} z_1(y),\ \ y \in [-1; 3].$$



Исследуем поведение $z_1\,(y)$ по правилам нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на замкнутом промежутке. Как известно, непрерывная функция на замкнутом промежутке достигает своих наибольшего и наименьшего значений либо на концах промежутка, либо в стационарных точках внутри промежутка (если они есть).

Исследуем поведение функции $z_1(y)$ на участке AB:

$z'_1 = 0 \Leftrightarrow 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \in [-1;\,3]$ – стационарная точка на границе AB, совпадающая с левым концом промежутка. Сравнивая значения функции $z_1(A) = z_1(-1) = 4$, $z_1(B) = z_1(3) = 20$, получаем: $4 \le z\big|_{AB} \le 20$.

б) Уравнение участка AC имеет вид: $\begin{cases} y = -1, \\ x \in [0; 4], \end{cases}$ и функция z является функцией одной переменной x:

$$z\big|_{AC} = \left(x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5\right)\Big|_{y=-1} = x^2 - 3x + 4 \overset{\text{обозначим}}{=} z_2(x),\ \ x \in [0; 4].$$

Исследуем поведение функции $z_2(x)$ на участке AC:

$z_2' = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1{,}5 \ \Rightarrow\ x_0 = 1{,}5 \in [0; 4]$ – стационарная точка на границе AC, лежащая внутри промежутка. Сравнивая значения функции $z_2(A) = z_1(A) = 4$, $z_2(C) = z_2(4) = 8$ и $z_2(x_0) = z_2(1{,}5) = 1{,}75$, получаем: $1{,}75 \le z\big|_{AC} \le 8$.

в) Уравнение участка BC имеет вид: $\begin{cases} y = 3 - x, \\ x \in [0; 4], \end{cases}$ и функция z является функцией одной переменной x:

$$z\big|_{BC} = \left(x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5\right)\Big|_{y=3-x} = x^2 - x(3-x) + (3-x)^2 - 4x + 2(3-x) + 5 =$$

$$= 3x^2 - 15x + 20 \overset{\text{обозначим}}{=} z_3(x),\ \ x \in [0; 4].$$

Исследуем поведение функции $z_3(x)$ на участке BC:

$z_3' = 0 \ \Leftrightarrow\ 6x - 15 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 2{,}5 \ \Rightarrow\ x_1 = 2{,}5 \in [0; 4]$ – стационарная точка на границе BC, лежащая внутри промежутка. Сравнивая значения функции

$z_3(B) = z_1(B) = 20$, $z_3(C) = z_2(C) = 8$ и $z_3(x_1) = z_3(2{,}5) = 1{,}25$,

получаем: $1{,}25 \le z\big|_{BC} \le 20$.

Сравнивая все найденные значения функции, выбираем среди них наибольшее и наименьшее значения функции $z\,(x, y)$ в области D:

$$z_{наиб} = z(B) = 20,\ \ z_{наим} = z(M) = 1.$$

2) Отметим на построенном ранее чертеже области D точки, в которых функция имеет наибольшее и наименьшее значения: $B(0,3)$ и $M(2,0)$, а также все найденные в процессе решения точки, указав значения функции $z(x, y)$ в этих точках.

Ответы: 1) $z_{наиб} = z(B) = z(0,3) = 20$, $z_{наим} = z(M) = z(2,0) = 1$; 2) рисунок .

Задача 5. Поверхность σ задана уравнением $z = \dfrac{y}{x} + xy - 5x^3$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности σ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Решение.

Найдем частные производные функции

$z = f(x, y) = \dfrac{y}{x} + xy - 5x^3$:

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_x = -\frac{y}{x^2} + y - 15x^2;$$

$$f'_y(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_y = \frac{1}{x} + x.$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности σ, поэтому можно вычислить z_0, подставив заданные $x_0 = -1$ и $y_0 = 2$ в уравнение поверхности:

$$z = \frac{y}{x} + xy - 5x^3 \Rightarrow z_0 = \frac{2}{-1} + (-1)\,2 - 5\,(-1)^3 = 1.$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(-1, 2, 1)$:

$$f'_x(M_0) = -\frac{2}{(-1)^2} + 2 - 15(-1)^2 = -15; \quad f'_y(M_0) = \frac{1}{-1} - 1 = -2.$$

Получаем уравнение касательной плоскости к поверхности σ в точке M_0:

$$z - 1 = -15(x + 1) - 2(y - 2) \Rightarrow 15x + 2y + z + 10 = 0.$$

Получаем канонические уравнения нормали к поверхности σ в точке M_0: $\dfrac{x+1}{-15} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Ответы: уравнение касательной плоскости: $15x + 2y + z + 10 = 0$; уравнения нормали: $\dfrac{x+1}{-15} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

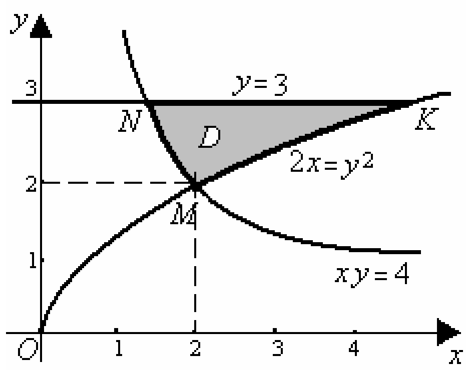
Задача 6. Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси Ox тонкой однородной пластинки, имеющей форму области D, ограниченной заданными линиями: $xy = 4,\ 2x = y^2,\ y = 3$. Построить чертеж области интегрирования.

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x, y) \equiv 1$.

Решение.

Область D (рис. 11) представляет собой криволинейный треугольник MNK, где $N\left(\dfrac{4}{3}, 3\right)$, $K\left(\dfrac{9}{2}, 3\right)$. Для определения координат точки M решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 4, \\ 2x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2/2, \\ y^3/2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2/2, \\ y^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2, 2).$$



Область D – правильная в направлении оси Ox, она задается системой неравенств: $D:\begin{cases} 2 \le y \le 3, \\ 4/y \le x \le y^2/2, \end{cases}$ где $x=\dfrac{4}{y}$, $x=\dfrac{y^2}{2}$ – это уравнения линий, ограничивающих область слева и справа.

Найдем статический момент пластинки MNK относительно оси Ox:

$$M_x = \iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)\,dS = [\gamma(x,y)\equiv 1] = \iint\limits_D y\,dS\,.$$

Для вычисления двойного интеграла сводим его к повторному интегралу в соответствии с системой неравенств, задающих область D:

$$M_x = \iint\limits_D y\,dS = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{4/y}^{y^2/2} y\,dx = \int\limits_2^3 y\left(\int\limits_{4/y}^{y^2/2} dx\right)dy = \int\limits_2^3 y\cdot x\Big|_{x=4/y}^{x=y^2/2}\,dy = \int\limits_2^3 y\left(\frac{y^2}{2}-\frac{4}{y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_2^3\left(\frac{y^3}{2}-4\right)dy = \left(\frac{y^4}{8}-4y\right)\Bigg|_2^3 = \frac{81}{8}-12-\frac{16}{8}+8 = \frac{65}{8}-4 = \frac{65-32}{8} = \frac{33}{8} = 4{,}125.$$

Ответы: $M_x = 4{,}125$ ед. стат. момента; область интегрирования на рисунке.

Задача 8. Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости xOy, а ось симметрии совпадает с осью Oz, если заданы радиус основания $R = 0{,}5$, высота цилиндра $H = 2$ и функция плотности $\gamma = 4\rho^2 + 6\rho^4 + 1$, где ρ – полярный радиус точки.

<u>Решение.</u>

Массу кругового цилиндра можно вычислить, используя тройной интеграл по области V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dv\,,$$

где γ – функция плотности, а V – область, соответствующая цилиндру.

Переходя к трехкратному интегралу в цилиндрических координатах, получаем:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\,dz\,,$$

где область интегрирования V (круговой цилиндр) можно задать системой неравенств: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le R, \\ 0 \le z \le H, \end{cases}$ при R = 0,5 и H = 2.

Для определения массы цилиндра нужно вычислить трехкратный интеграл:

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,5} \rho\, d\rho \int_0^2 (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1) dz = \begin{bmatrix} 4\rho^2 + 6\rho^4 + 1 \\ \text{не зависит от } z \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,5} (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\rho\, d\rho \int_0^2 dz .$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной z: $\int_0^2 dz = z\Big|_0^2 = 2$.

Затем находим интеграл по переменной ρ:

$$\int_0^{0,5} 2(4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\rho\, d\rho = 2\int_0^{0,5} (4\rho^3 + 6\rho^5 + \rho)\, d\rho = 2\left(\rho^4 + \rho^6 + \frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^3}\right) = 2\frac{4+1+8}{2^6} = \frac{13}{32}.$$

Третий этап – вычисление внешнего интеграла по переменной φ:

$$m = \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{32}\right) d\varphi = \frac{13}{32}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{32} \cdot 2\pi = \frac{13}{16}\pi \approx 2{,}55 .$$

Ответ: $m = \frac{13}{16}\pi \approx 2{,}55$ ед. массы.